



UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI BOLOGNA  
*Facoltà di Ingegneria*  
D.I.S.T.A.R.T.

---

# COMPORTAMENTO SOTTO CARICO DI ESERCIZIO DELLE STRUTTURE IN C.A.

Appunti dai seminari tenuti dal *ing. Ferretti*  
XVII ciclo del dottorato di ricerca in Meccanica delle Strutture





# Indice

<b>1</b>	<b>Introduzione</b>	<b>1</b>
1.1	Introduzione . . . . .	1
1.2	Organizzazione del lavoro . . . . .	1
<b>2</b>	<b>L'aderenza tra acciaio e calcestruzzo</b>	<b>2</b>
2.1	Introduzione . . . . .	2
2.2	Osservazioni sperimentali . . . . .	2
2.3	Variabili che descrivono il fenomeno dell'aderenza . . . . .	5
2.4	I modelli proposti per descrivere l'aderenza . . . . .	7
<b>3</b>	<b>Deformabilità degli elementi tesi</b>	<b>9</b>
3.1	Introduzione . . . . .	9
3.2	Osservazioni sperimentali . . . . .	9
3.2.1	Il retino di Moirè . . . . .	9
3.2.2	Altri rilievi sperimentali . . . . .	9
3.3	Sperimentazioni numeriche: Metodo degli Elementi Finiti . . . . .	10
3.3.1	Introduzione delle simulazioni numeriche . . . . .	10
3.3.2	modello monodimensionale . . . . .	10
<b>4</b>	<b>Deformabilità degli elementi strutturali inflessi</b>	<b>14</b>
4.1	Introduzione . . . . .	14
4.2	Relazione momento - curvatura . . . . .	14
4.3	Metodi di verifica delle sezioni . . . . .	15
4.3.1	I modelli sezionali . . . . .	16
4.3.2	I modelli a concio . . . . .	16
4.4	Momento di fessurazione . . . . .	17

# Capitolo 1

## Introduzione

### 1.1 Introduzione

Il presente lavoro presenta gli appunti presi durante i seminari tenuti dall'ing. Ferretti dell'Università di Pavia.

Gli argomenti che verranno trattati riguardano il comportamento delle strutture monodimensionali in Cemento Armato (di seguito C.A.) sotto l'azione di carichi di esercizio: il valore delle sollecitazioni non raggiunge quindi i limiti di resistenza dell'elemento strutturale, ma interessa comunque la funzionalità dell'elemento stesso, sviluppando ad esempio un quadro fessurativo o delle deformazioni che risultano incompatibili con il normale utilizzo della struttura.

Trattando di elementi monodimensionali, ci si occuperà in particolare di:

- elementi tesi;
- travi inflesse.

### 1.2 Organizzazione del lavoro

La scaletta che verrà seguita nell'esposizione dei lavori presenta il seguente ordine:

1. aderenza acciaio - calcestruzzo;
2. deformabilità di elementi tesi;
3. deformabilità di elementi inflessi;
4. ampiezza delle fessure;
5. momento di fessurazione.

## Capitolo 2

# L'aderenza tra acciaio e calcestruzzo

### 2.1 Introduzione

Il fenomeno dell'aderenza tra i due materiali che compongono il C.A. è di fondamentale importanza per ogni elemento strutturale, in quanto tale fenomeno interessa pesantemente la distribuzione delle tensioni e quindi delle sollecitazioni tra i due materiali che altrimenti lavorerebbero separatamente.

Il comportamento del calcestruzzo viene suddiviso in due stati in base alla presenza di fessure o meno:

- *stato I*: assenza di fessure e comportamento elastico lineare;
- *stato II*: quadro fessurativo sviluppato a tal punto da deviare il comportamento da quello lineare.

### 2.2 Osservazioni sperimentali

Per poter approfondire e studiare il fenomeno dell'aderenza tra i due materiali sono stati fatti diversi esperimenti, dei quali verranno di seguito riportate le osservazioni registrate durante la prova.

Il provino (cf. Figura 2.1), costituito essenzialmente da un blocco di calcestruzzo dal quale siano state fatte affiorare le estremità di una barra d'acciaio (internamente cava per poter alloggiare dei *strain gages*) alla quale è stata applicata una sollecitazione di trazione mono-assiale.

I risultati di tale indagine sperimentale (deformazioni lette agli estensimetri inseriti all'interno della barra) hanno evidenziato che l'andamento delle deformazioni  $\varepsilon$  lungo la barra metallica presentano dei picchi in corrispondenza alle fessure principali che tagliano trasversalmente tutto il provino (cf. Figura 2.2). In caso di integrità dell'elemento strutturale (*stato I*) la distribuzione costante di deformazioni è pari ad  $\varepsilon_{cost}$ .

La presenza delle fessure denuncia l'esistenza di uno scorrimento tra la barra ed il calcestruzzo nel quale è immersa: è infatti evidente come tale scorrimento si sia verificato al

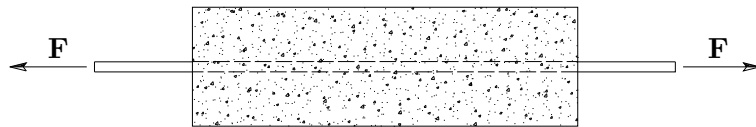


Figura 2.1: Elemento strutturale in C.A. teso

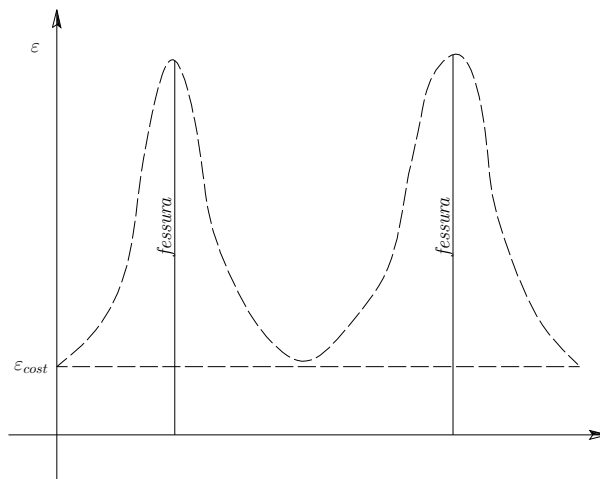


Figura 2.2: Distribuzione delle deformazioni  $\epsilon$  lungo la barra di Figura 2.1

fine di garantire l'equilibrio. Lo spostamento differenziale è stato evidenziato mediante prove sperimentali che a seguito di una prova a trazione di un provino di calcestruzzo, una volta fatto assorbire dell'inchiostro al calcestruzzo e procedendo successivamente al sezionamento del provino stesso, si è ottenuta una descrizione delle fessure (cf. Figura 2.3): quelle inclinate a  $45^\circ$  denunciano un chiaro scorrimento della barra verso le fessure principali del provino.

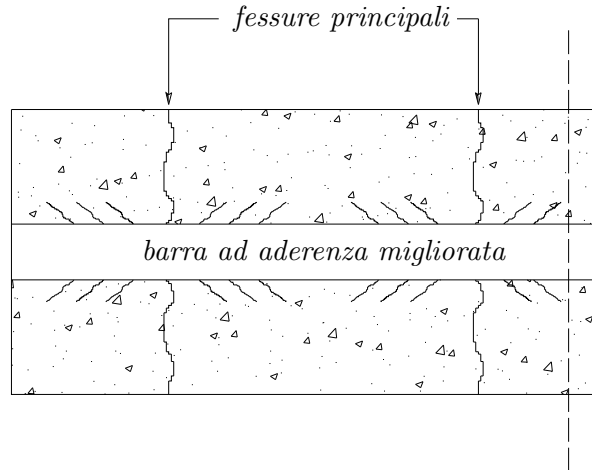


Figura 2.3: Fessure nel calcestruzzo per la presenza di una barra

La presenza di una barra ad aderenza migliorata introduce una distribuzione delle tensioni di tipo tri-dimensionale. Per semplicità di modellazione si consideri una barra liscia alla cui superficie (interfaccia con il calcestruzzo) si sviluppino delle tensioni tangenziali  $\tau$  di aderenza (cf. Figura 2.4).

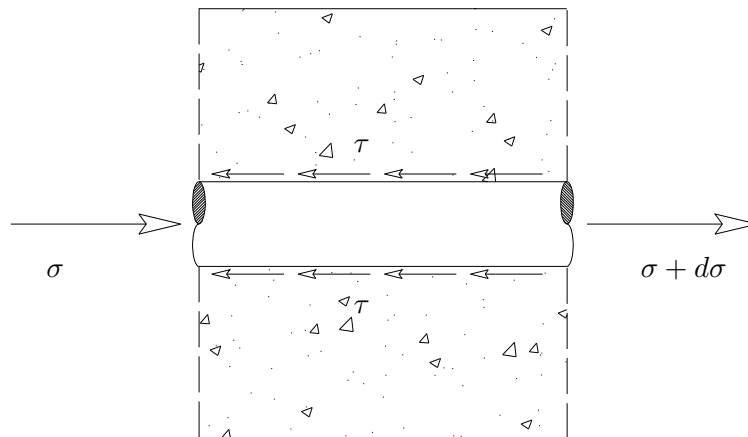


Figura 2.4: Equilibrio tra tensioni di aderenza e tensioni di trazione sulla barra

Il grafico delle tensioni tangenziali di aderenza, presenta un comportamento che, schematicamente, può essere rappresentato come il grafico in Figura 2.5, dove è possibile notare i

seguenti punti fondamentali:

**fase 1** : aderenza chimica prodotta al momento del getto;

**fase 2** : formazione delle fessure trasversali;

**fase 3** : compressione del calcestruzzo a ridosso dei denti delle barre ad aderenza migliorata (cf. Figura 2.6);

**fase 4** : scorrimento dell'insieme barra-calcestruzzo fessurato.

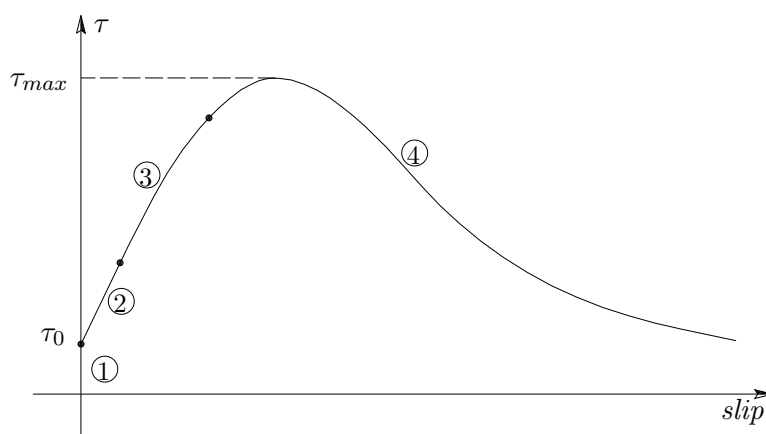


Figura 2.5: Grafico tensioni aderenza ( $\tau$ ) e lo scorrimento ( $slip$ )

Il crushing del calcestruzzo (cf. Figura 2.6) a ridosso delle nervature delle barre provoca uno sfilamento libero dell'armatura nel caso di applicazione di una forza di pull-out. Nel caso tale forza invertisse il suo verso si verrebbe a creare un gioco attorno alla nervatura stessa che danneggia ulteriormente il calcestruzzo.

Durante una prova di pull-out (cf. Figura 2.7) lo stato tensionale che si genera presenta delle tensioni circonferenziali di trazione che causano la rottura del calcestruzzo per *splitting*; a tali tensioni di trazione si identificano contestualmente delle zone in cui si concentrano delle tensioni di compressione (*puntoni*) che si oppongono allo sfilamento della barra.

## 2.3 Variabili che descrivono il fenomeno dell'aderenza

Altre prove sperimentali hanno cercato di produrre una legge di aderenza, partendo a considerare un'aderenza di in una zona limitata a solo tre denti di una barra ad aderenza migliorata. Tale condizione si impone quando si voglia andare a ricercare una legge piú possibile locale: maggiore è la zona aderente oggetto di studio e maggiori sono le dimensioni di indagine e di applicazione.



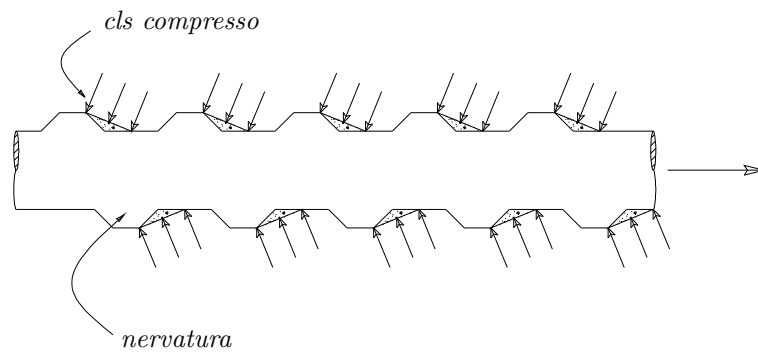


Figura 2.6: Crushing del calcestruzzo compresso

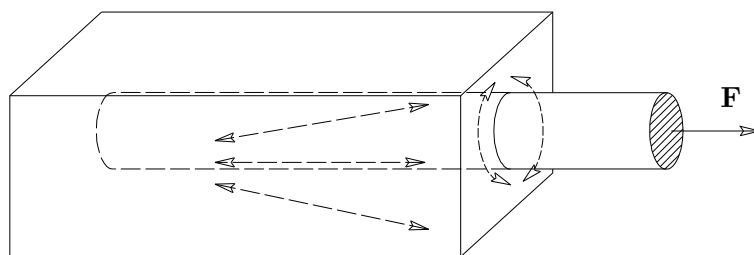


Figura 2.7: distribuzioni delle tensioni di compressione (punti) e delle tensioni circolari di trazione (tensioni di splitting)

Si rende allora necessario evidenziare quali sono le grandezze e le variabili che potranno definire e quindi descrivere il fenomeno studiato:

- *resistenza a trazione ( $f_{ct}$ ):* interviene nelle tensioni di splitting;
- *energia di frattura del calcestruzzo;*
- *resistenza a compressione ( $f_c$ ):* interviene nello sviluppo dei puntoni durante la prova a trazione (cf. Figura 2.7);
- *numero e geometria delle nervature;*
- *confinamento del calcestruzzo;*
- *posizione dell'ancoraggio della barra* rispetto alla sezione terminale dell'elemento in calcestruzzo (cf. Figura 2.8): se l'ancoraggio delle barre è prossimo alla faccia libera del provino si ha una minore aderenza;
- *direzione del getto:* la presenza di eventuali vuoti marcherebbe sensibilmente la resistenza del calcestruzzo;
- *presenza di staffe:* possono assorbire le tensioni di splitting;
- *tipo di carico applicato:* monotono o ciclico.

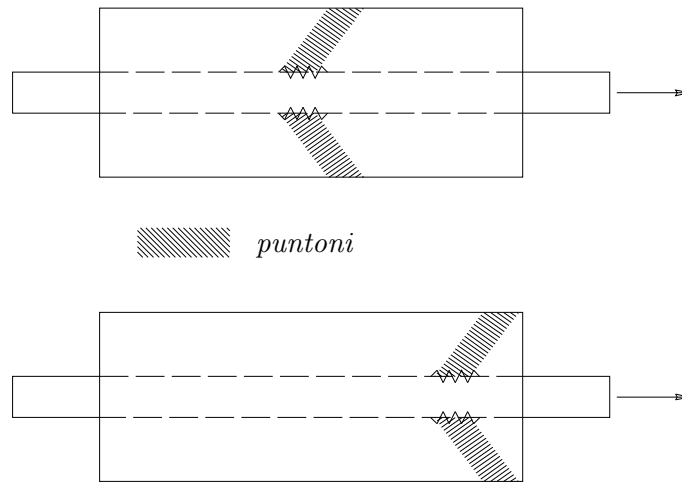


Figura 2.8: Disposizione delle tensioni di compressione (puntoni) a seconda della zona di ancoraggio

## 2.4 I modelli proposti per descrivere l'aderenza

Tra i vari modelli che sono stati presentati, si prenderà in considerazione in questa sede il modello di Eligehausen et al. (CEB MC 90 - 1992), la cui espressione del primo tratto è la seguente:

$$\tau = \tau_{max} \left( \frac{s}{s_1} \right)^\alpha ; \quad (2.1)$$

essa dipende inoltre dal confinamento del calcestruzzo: ad un valore decrescente del confinamento corrisponde una riduzione della tensione tangenziale  $\tau$  (cf. Figura 2.9).

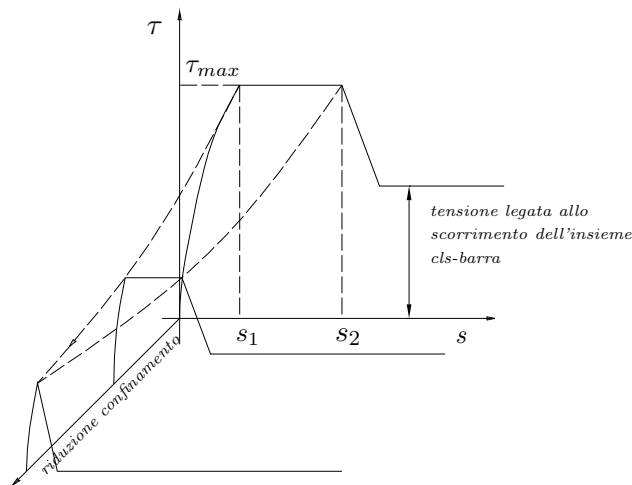


Figura 2.9: Modello di Elingehausen con riduzione legata ad una diminuzione del confinamento

La legge schematizzata in Figura 2.9 trova una particolare riscontro con i risultati sperimentali anche se risulta da una serie di notevoli semplificazioni del comportamento reale.

Si sottolinea come il regime tensionale delle barre immerse nel calcestruzzo sia tale da mantenere le barre stesse all'interno del comportamento elastico. Poche sono invece le prove che vedono portate a sollecitazioni agli stati limite ultimi: l'aderenza, infatti, in queste condizioni risulta essere un fattore di limitata importanza.

## Capitolo 3

# Deformabilità degli elementi tesi

### 3.1 Introduzione

La deformabilità degli elementi strutturali sottoposti a trazione, risulta indispensabile per gli stati limite di esercizio per i quali le fessure risultano essere il danno principale, in quanto, pur non compromettendo la resistenza dell'elemento, comportano una limitazione nella sua utilizzazione.

### 3.2 Osservazioni sperimentali

#### 3.2.1 Il retino di Moirè

Per le osservazioni del comportamento reale di un elemento strutturale teso, si utilizzi un elemento strutturale di calcestruzzo con una barra d'armatura annegata nel mezzo e successivamente sezionato a metà (cf. Figura 3.1).

Sulla faccia corrispondente alla sezione viene applicato un foglio su cui è impresso il retino di Moirè che è foto-sensibile ed è caratterizzato da una data densità di linee al millimetro (generalmente 50 linee/mm).

Una volta applicato il retino (legato direttamente al provino) si posiziona al di sopra un altro foglio simile: la deformazione dell'elemento provocherà una sovrapposizione delle linee dei due reticoli, rendendo possibile una misurazione della deformazione stessa.

#### 3.2.2 Altri rilievi sperimentali

Risulta evidente che la prova esposta nella sezione 3.2.1 presenta dei difetti insiti nell'operazione di sezionamento e nella conseguente applicazione del carico.

Un esperimento che ovvia alla necessità di dover sezionare l'elemento strutturale, prevede di lasciare dei fori in corrispondenza dell'armatura, in modo tale che sparando un raggio di luce laser, questa possa essere riflessa/rifratta e quindi letta la deformazione corrispondente.

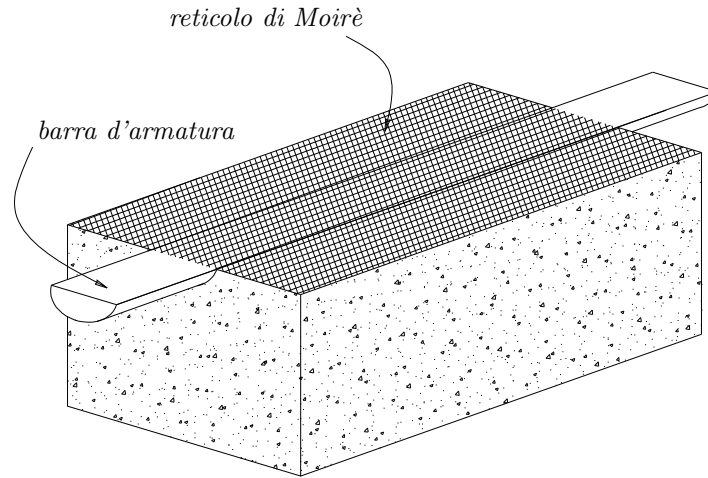


Figura 3.1: Provino utilizzato per eseguire i rilievi sperimentali con il reticolo di Moirè

### 3.3 Sperimentazioni numeriche: Metodo degli Elementi Finiti

#### 3.3.1 Introduzione delle simulazioni numeriche

È evidente la difficoltà di rilevare sperimentalmente le deformazioni  $\varepsilon_c$  del calcestruzzo,  $\varepsilon_s$  dell'acciaio ed in genere delle grandezze che si possono rilevare sperimentalmente. Alle sperimentazioni reali si sono affiancate quelle virtuali che il Metodo degli Elementi Finiti mette a disposizione degli ingegneri, rendendo possibili alcune osservazioni che altrimenti non sarebbero evidenziate.

Si rende quindi necessario un modello numerico generale che simuli in maniera sufficientemente precisa il fenomeno e che in particolarmente contenga:

- una legge costitutiva tri-dimensionale;
- una legge coesiva;
- il fenomeno del ritiro del calcestruzzo;
- l'adesione chimica fra la barra d'armatura e il calcestruzzo.

#### 3.3.2 modello monodimensionale

Le sperimentazioni numeriche presentate hanno preso in considerazione un modello di tipo monodimensionale, in cui è insita l'ipotesi di conservazione delle sezioni piane. In particolare si consideri la deformazione media:

$$\varepsilon_{cm} = \gamma \varepsilon_c; \quad (3.1)$$

dove  $\gamma$  è un fattore correttivo che indica la validità o meno dell'ipotesi di conservazione delle sezioni piane. Il modello viene inoltre suddiviso in sezioni equidistanti a cui si valuteranno esattamente le variabili in gioco.

Lo scorrimento:

$$s = s_s - s_c; \quad (3.2)$$

e la sua variazione lungo l'asse longitudinale  $z$ :

$$\frac{ds}{dz} = \varepsilon_s - \varepsilon_c. \quad (3.3)$$

L'equilibrio alla sollecitazione assiale globale:

$$\sigma_s A_s + \sigma_c A_c = N. \quad (3.4)$$

L'equilibrio locale:

$$A_s \frac{d\sigma_s}{dz} = c\tau(s); \quad (3.5)$$

dove  $c$  è il contorno della barra e  $\tau(s)$  è la tensione tangenziale di aderenza, funzione dello scorrimento  $s$  (cf. Figura 2.4).

In particolare sono state assunte le seguenti ipotesi:

- calcestruzzo in regime lineare elastico;
- acciaio in regime lineare elastico;
- legge coesiva alla Bažant;
- legge di aderenza di tipo ciclico (i.e. inversione dei segni dello scorrimento).

I risultati che si ottengono sono compresi all'interno dei comportamenti dello *stato I* e quelli dello *stato II*. Ciò significa che il fenomeno del *tension stiffening*<sup>1</sup> contribuisce alla rigidità globale dell'elemento strutturale.

La formazione della prima fessura è idealmente arbitraria in quanto tutto l'elemento strutturale è sottoposto ad una stessa tensione di trazione (cf. Figura 3.3), ma la posizione della prima fessura modifica sostanzialmente il quadro fessurativo e quindi il grafico riportato in Figura 3.2, nonchè l'ampiezza delle fessure).

La distanza tra le fessure risulta proporzionale alla lunghezza di ancoraggio ( $l_{anc.}$ ). Nel caso siano presenti delle staffe nel calcestruzzo con un  $d < l_{anc.}$ , le fessure si formano in corrispondenza delle stesse staffe.

Con riferimento a Figura 3.3 è possibile evincere l'importanza della prima fessura; le fessure successive alla prima si possono generare in una zona ben determinata:

$$l_{tr} < \text{distanza tra le fessure} < 2l_{tr}.$$

---

<sup>1</sup>Il *tension stiffening* contribuito dato dalla resistenza a trazione del calcestruzzo non ancora fessurato.

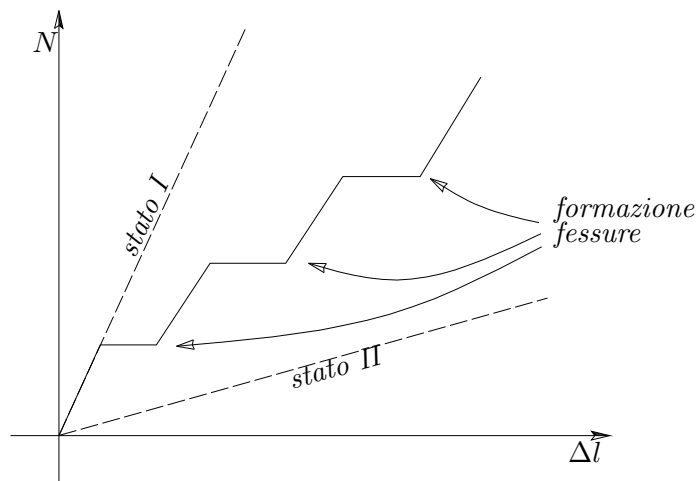


Figura 3.2: Relazione sforzo normale - allungamento per un elemento strutturale teso

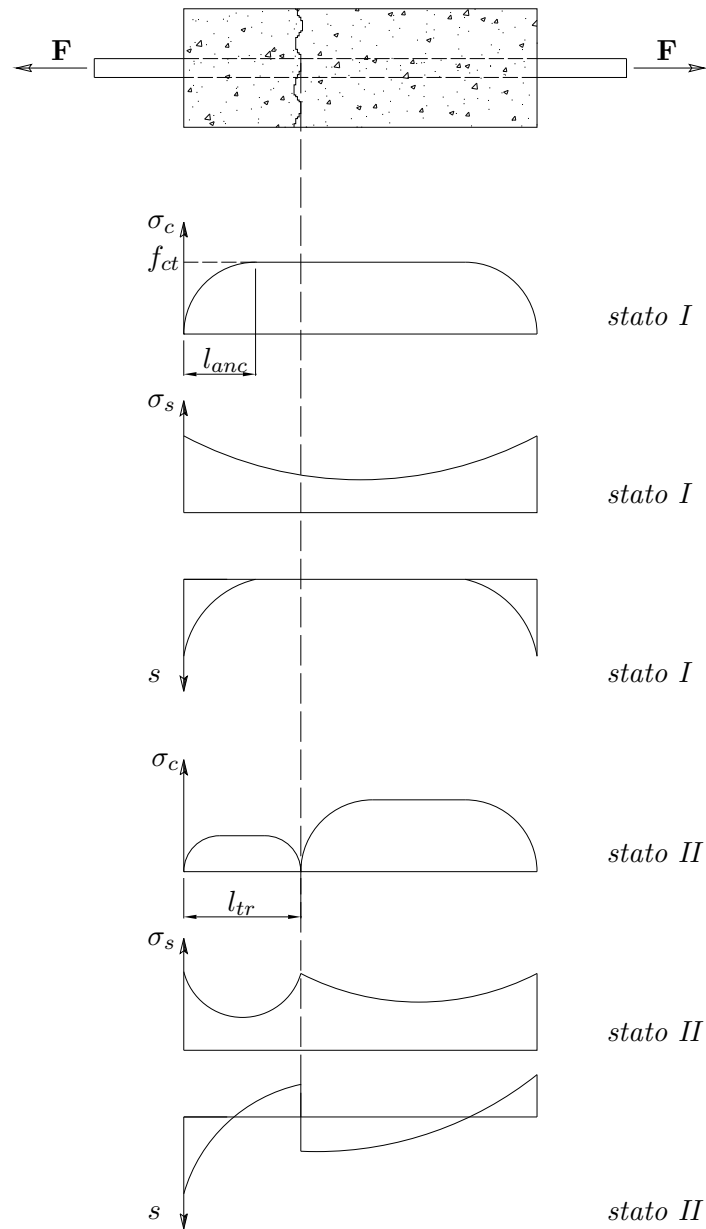


Figura 3.3: Distribuzione delle tensioni ( $\sigma_c$  calcestruzzo,  $\sigma_s$  acciaio) in un provino sottoposto a trazione semplice



## Capitolo 4

# Deformabilità degli elementi strutturali inflessi

### 4.1 Introduzione

Considerazioni analoghe a quelle presentate nei precedenti capitoli, vengono qui estese agli elementi strutturali inflessi.

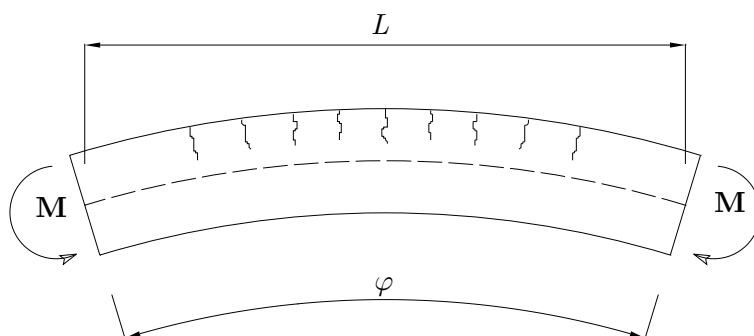


Figura 4.1: Elemento strutturale inflesso con momento costante  $M$

### 4.2 Relazione momento - curvatura

Con riferimento alla Figura 4.2 e quindi ipotizzando conservazione delle sezioni piane, si esprime la formulazione della curvatura *sezionale* come segue:

$$\mu = \frac{\varepsilon_s - \varepsilon_c}{d}. \quad (4.1)$$

Con riferimento a Figura 4.1 la curvatura assume la seguente formulazione:

$$\mu = \frac{1}{R} = \frac{\varphi}{L}. \quad (4.2)$$

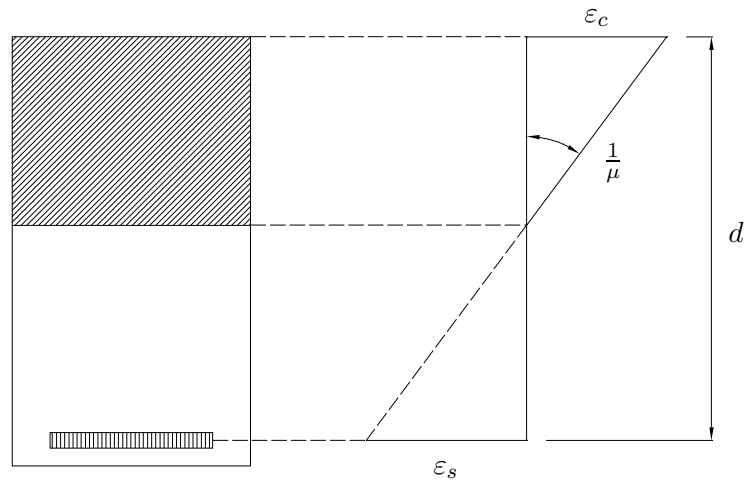


Figura 4.2: Deformazioni di calcestruzzo e acciaio

La trave fessurata e sottoposta ad una sollecitazione di momento flettente costante lungo l'asse, presenta una diversa curvatura.

Vengono quindi a differenziarsi due tipi di curvatura:

- media;
- locale.

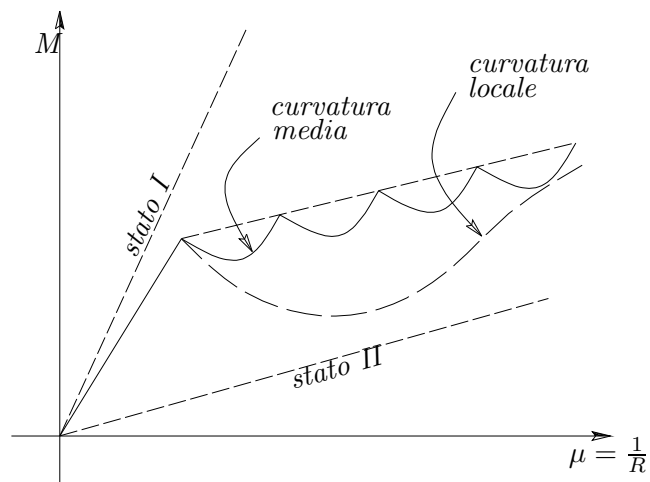


Figura 4.3: Relazione momento - curvatura: locale e media (con più fessure)

Si pone ora il problema di dove usare i diversi tipi di curvatura; in Figura si riporta un esempio ed una indicazione.

### 4.3 Metodi di verifica delle sezioni

Per la verifica delle sezioni degli elementi strutturali esistono due tipologie di modelli:

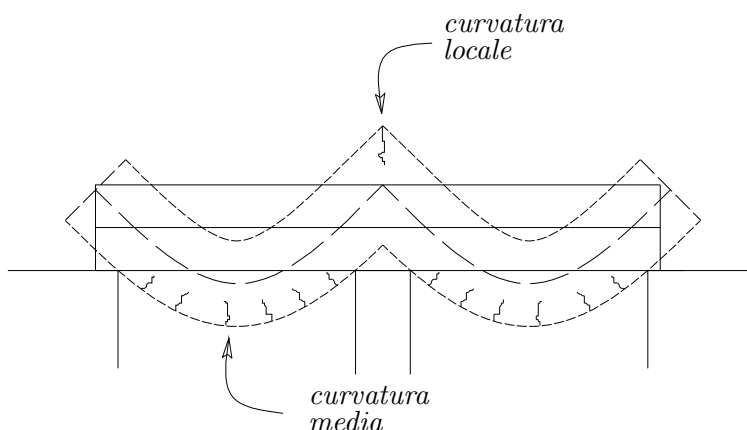


Figura 4.4: Trave su tre appoggi deformata e fessurata: dove considerare la curvatura locale e dove quella media

- sezionali;
- a concio.

Di seguito sono esposti entrambe le tipologie di modello con specificate le caratteristiche salienti.

#### 4.3.1 I modelli sezionali

I *modelli sezionali* prendono in considerazione una sezione trasversale che sia rappresentativa del tronco di trave.

Si considerano dei tratti in *stato I* ed altri in *stato II* e la curvatura sarà un misto tra le caratteristiche dei singoli tratti. La presenza di condizioni corrispondenti a stati diversi devono essere prese in considerazione nelle leggi costitutive ed è quindi importante considerare il *tension stiffening* che il calcestruzzo non ancora fessurato apporta alla resistenza finale.

#### 4.3.2 I modelli a concio

Nei modelli a concio si considera un tratto di trave (concio) che sia rappresentativo del comportamento globale (cf. Figura 4.5):

- viene considerata l'aderenza tra acciaio e calcestruzzo;
- oltre all'equazione di equilibrio alla traslazione, viene introdotta quella di equilibrio alla rotazione;
- nelle condizioni al contorno si considerano due sezioni fessurate, senza calcestruzzo sottoposto a trazione;
- la curvatura varia all'interno di un concio da sezione a sezione (nei modelli sezionali ciò non veniva preso in considerazione);

- l'incertezza della posizione della prima fessura genera un fuso all'interno del quale il comportamento del concio si colloca.

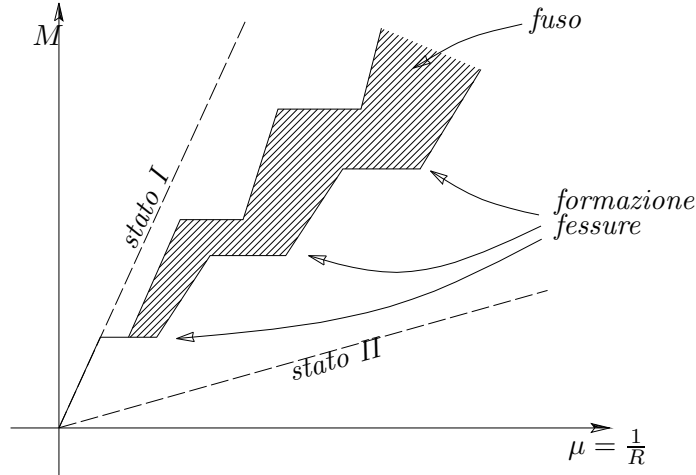


Figura 4.5: Relazione momento - curvatura per un modello a concio

Per motivi progettuali si è soliti ricorrere ad una diversa legge che sia di più facile maneggevolezza.

Il comportamento di un concio di trave con posizione generica tra lo *stato I* e lo *stato II* (cf. Figura 4.6) e si assuma la legge lineare:

$$\frac{1}{R} = \xi \frac{1}{R_2} + (1 - \xi) \frac{1}{R_1}; \quad (4.3)$$

dove  $\frac{1}{R_1}$  e  $\frac{1}{R_2}$  sono i valori di curvatura nei vari stati del calcestruzzo ed inoltre il valore della variabile  $\xi$  secondo la normativa italiana diventa la seguente:

$$\xi = 1 - \xi_1 \xi_2 \left( \frac{\sigma_{sr}}{\sigma_s} \right)_{II}^2; \quad (4.4)$$

dove  $\xi_1$  vale 1 con barre ad aderenza migliorata e 0.5 con barre lisce,  $\xi_2$  vale 1 per un carico di breve durata e 0.5 per un carico permanente: si può notare come tale grandezza dipenda dall'armatura della trave stessa.

## 4.4 Momento di fessurazione

Il momento di fessurazione, assieme alla valutazione del modulo di elasticità del calcestruzzo fessurato, è di estrema importanza per le verifiche necessarie perchè corrisponde al valore del momento per cui la trave stessa cambia il proprio comportamento.

Sono stati fatti degli esperimenti di inflessione di travi rettilinee con armatura a diverso diametro ( $\emptyset$ ), ma con la stessa percentuale.

Ciò che ne è risultato è che vi una proporzione inversa:

$$M_{cr} \propto \frac{1}{\emptyset}. \quad (4.5)$$

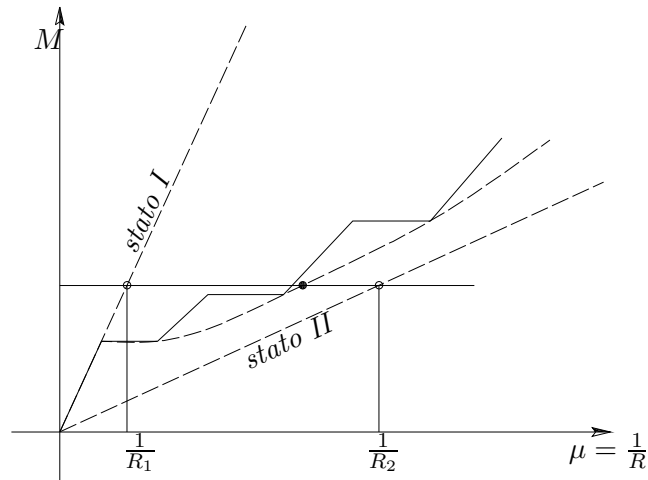


Figura 4.6: Momento - curvatura

Risulta inoltre di notevole importanza non tanto il momento a cui si verifica la prima fessura, ma il *momento di fessurazione efficace* ( $M_{cr}^*$ ) che rappresenta quello per cui il diagramma momento - curvatura cambia il proprio comportamento.

È evidente come la presenza di fessure con un'apertura limitata, contribuiscano alla rigidità complessiva: la coesione assicura un certo grado di ingranamento e quindi una limitata ma non nulla resistenza a trazione; in particolare:

- con armature  $\varnothing = 16\text{ mm}$  si hanno fessure ampie e tensione da coesione tendente ad un valore nullo;
- con armature  $\varnothing = 6\text{ mm}$  si hanno fessure piccole e tensione da coesione in grado di contribuire;

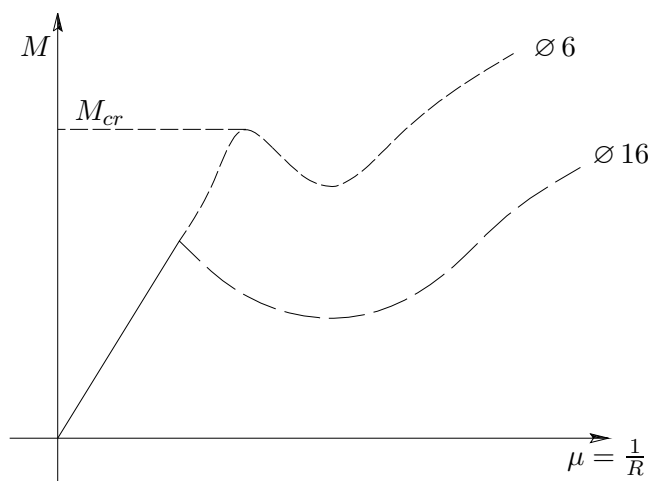


Figura 4.7: Relazione momento - curvatura con diversi diametri di armatura

Indicando con  $w$  l'apertura delle fessure, il momento di fessurazione vale:

$$M_{cr} = w f_{ct}; \quad (4.6)$$

mentre il momento di fessurazione efficace vale:

$$M_{cr}^* = w f_{ct_{fl}}; \quad (4.7)$$

dove  $f_{ct_{fl}} = 1.2 \div 2 f_{ct}$  è la resistenza a trazione del calcestruzzo per una sollecitazione a momento flettente.